Système des coordonnées plates de la déformation verselle des singularités isolées simples d'hypersurface et zéros de l'intégrale d'Abel

Susumu TANABÉ

RÉSUMÉ - *On étudie le système des équations differéntielles satisfaites par l'intégrale d'Abel associée au cycle* $\gamma_s \subset \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : H(x,y;s)=0\}$ *définie pour la déformation verselle d'une singularité isolée simple d'hypersurface. Comme application, on obtient une estimation de la multiplicité des zéros de l'intégrale* $I_\omega(s) = \int_{\gamma_s} \omega$ *en fonction de poids quasihomogènes associés à* $H(x,y;0)$ *et de* $deg(\omega)$.

1. **Introduction**

Dans cette note, nous poursuivons le problème de l'estimation des zéros de l'intégrale d'Abel étudié par plusieurs auteurs [3], [4] etc. C'est une demarche vers une reponse raisonnable au XVIe problème de Hilbert sur le nombre des cycles limites. Dans un travail précedent [7], nous avons établi une estimation de la multiplicité des zéros de l'intégrale hyperelliptique associée à la singularité A_μ, en se servant du système de Gauß-Manin satisfait par l'intégrale hyperelliptique. La stratégie de cette note est semblable à celle de [7], pourtant la tactique en diffère au sens que nous utilisons ici l'expression du système de Gauß-Manin au moyen des coordonnées plates introduites par [6]. Dans [6], les coordonnées plates (flat coordinates) ont été introduites comme les invariants canoniques d'un groupe de Coxeter fini irreductible qui satisfont certaines conditions naturelles. C'est grâce à Noumi [5] que l'utilité prépondérante de ces coordonnées se manifeste aux études du système de Gauß-Manin. Notre demarche s'appuie sur un résultat de [5] qui est formulé au Théorème 2.1. Ce résultat nous permet d'exprimer avec les coordonnées plates, le système de de Gauß-Manin associé à la déformation verselle des singularités isolées simples d'hypersurfaces, d'une façon plus simple que l'expression du système par les coordonnées usuelles de l'espace de déformation verselle (voir [7]). L'objet central de notre recherche est l'intégrale d'Abel associée à une singularité isolée simple dhypersurface pour laquelle on établit le résultat suivant:

Théorème *Soit* $\gamma_s \subset \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : H(x,y;s)=0\}$ *un cycle évanescent de la déformation verselle d'une singularité isolée simple d'hypersurface de la liste (2.1) i.e.* A_μ, D_μ, E_6, E_7, E_8. *Alors il existe un ensemble ouvert dense* $U \subset \mathbf{R}^\mu \setminus D$ *tel que la multiplicité des zéros* N *de l'intégrale d'Abel (1.1) non-nulle*

$$I_{P,Q,\gamma_s}(s) = \int_{\gamma_s} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \tag{1.1}$$

avec $P(x,y), Q(x,y)$ *des polynômes de degré au plus* K *i.e.*$P(x,y) = \sum_{0\le i+j\le K} P_{i,j}x^iy^j$, $Q(x,y)$ $= \sum_{0\le i+j\le K} Q_{i,j}\ x^iy^j$. *doit satisfaire à chaque point* $s \in U$ *l'inégalité suivante:*

$$N \le \mu(1+[(\rho_1+\rho_2)(K-1)])-1, \tag{1.2}$$

où ρ_1, ρ_2 *sont les poids quasihomogènes des variables* x, y *définis pour chaque singularité.*

Il est facile de déduire de (1.2) que si $\mu, \nu, K, m \le n$, alors la multiplicité des zéros N est dominé par une fonction quadratique en n. Nos résultats, donc, paraissent une amélioration des estimations obtenues dans [4] (la multiplicité de chaque zéro $\leq \frac{n^4+n^2-2}{2}$) pour autant qu'il s'agisse de l'intégrale du type (1.1).

2. Déformation verselle des singularités isolées simples d'hypersurface

D'abord, on regarde la déformation verselle des singularités isolées simples d'hypersurface:
(2.1)

$A_\mu : H(x,y;s) = x^{\mu+1} + y^2 + \sum_{i=0}^{\mu-1} s_{i0}x^i,$
$D_\mu : H(x,y;s) = x^{\mu-1} + xy^2 + \sum_{i=1}^{\mu-2} s_{io}x^{i-1} + s_{01}y + s_{00},$
$E_6 : H(x,y;s) = x^4 + y^3 + s_{21}x^2y + s_{11}xy + s_{20}x^2 + s_{10}x + s_{01}y + s_{00},$
$E_7 : H(x,y;s) = x^3 + xy^3 + s_{21}x^2y + s_{11}xy + s_{20}x^2 + s_{02}y^2 + s_{10}x + s_{01}y + s_{00},$
$E_8 : H(x,y;s) = x^5 + y^3 + s_{31}x^3y + s_{21}x^2y + s_{11}xy + s_{01}y + s_{30}x^3 + s_{20}x^2 + s_{10}x + s_{00}.$

Nous définissons un ensemble fini $\mathbf{I} \subset \mathbf{N}^2$ associé à chaque singularité ci-dessus qui satisfait les conditions suivantes:

(1) $\mid \mathbf{I} \mid = \mu =$ le nombre de Milnor de la singularité.
(2) A chaque élément $(\nu_1, \nu_2) \in \mathbf{I}$ correspond un monôme $x^{\nu_1}y^{\nu_2}$ qui est un élément de la base de l'espace

$$\mathbf{C}[x,y]/(\frac{\partial}{\partial x}H(x,y;0)), \frac{\partial}{\partial y}H(x,y;0)).$$

On remarque que toutes les singularités de la liste (2.1) sont quasihomogènes. C'est à dire, il existe $(\rho_1, \rho_2) \in \mathbf{Q}^2_{>0}$ tel que

$$(\rho_1 x\frac{\partial}{\partial x} + \rho_2 y\frac{\partial}{\partial y})H(x,y;0) = H(x,y;0).$$

On définit pour $\alpha \in \mathbf{N}^\mu$ le poids quasihomogènes d'un monôme s^α:

$$weight\left(\prod_{(\nu_1,\nu_2)\in\mathbf{I}} s^{\alpha_{\nu_1,\nu_2}}\right) = \langle w, \alpha\rangle = \sum_{(\nu_1,\nu_2)\in\mathbf{I}} w_{\nu_1,\nu_2}\alpha_{\nu_1\nu_2} \tag{2.2}$$

où $w_{\nu_1\nu_2} = 1 - (\rho_1\nu_1 + \rho_2\nu_2)$. On définit pour chaque $(\nu_1, \nu_2) \in \mathbf{I}$ un réseau d'entiers $L(\nu_1, \nu_2)$ selon Noumi [5]. Dans les cas de A_μ, E_6, E_8 :

$$L(\nu_1, \nu_2) = ((\nu_1, \nu_2) + L) \cap \mathbf{N}^2$$

où $L = \mathbf{Z}(\frac{1}{\rho_1}, 0) + \mathbf{Z}(0, \frac{1}{\rho_1}) \subset \mathbf{Z}^2$. Soit
(2.3)

$$C_{\nu_1\nu_2}(\beta_1, \beta_2) = (-1)^{\rho_1(\beta_1-\nu_1)+\rho_2(\beta_2-\nu_2)}\frac{\Gamma(\rho_1(\beta_1+1))\Gamma(\rho_2(\beta_2+1))}{\Gamma(\rho_1(\nu_1+1))\Gamma(\rho_2(\nu_2+1))} \qquad \text{si} \qquad (\beta_1, \beta_2) \in L(\nu_1, n_2)$$

$$= 0 \qquad \text{si} \qquad (\beta_1, \beta_2) \notin L(\nu_1, \nu_2).$$

Dans les cas de D_μ, E_7 : $L = \mathbf{Z}(\frac{1}{\rho_1}, 0) + \mathbf{Z}(1, \frac{1}{\rho_2})$, $L(\nu_1, \nu_2) = ((\nu_1, \nu_2) + L) \cap \mathbf{N}^2$. Soit

(2.4) $C_{\nu_1\nu_2}(\beta_1, \beta_2)$

$$= (-1)^{\rho_1(\beta_1-\nu_1)+\rho_2(1-\rho_1)(\beta_2-\nu_2)}\frac{\Gamma(\rho_1[\beta_1+1-\rho_2(\beta_2+1)])\Gamma(\rho_2(\beta_2+1))}{\Gamma(\rho_1[\nu_1+1-\rho_2(\nu_2+1)])\Gamma(\rho_2(\nu_2+1))} \qquad \text{si } (\beta_1, \beta_2) \in L(\nu_1, \nu_2)$$

$$= 0 \qquad \text{si} \qquad (\beta_1, \beta_2) \notin L(\nu_1, \nu_2).$$

Alors on peut introduire un système des “coordonnées plates” dans l’espace de paramètres de déformation $\mathbf{C}^\mu_s$ (ou bien $\mathbf{R}^\mu$) [5]. Notamment,

$$t_0 := t_{00} = s_{00} + \sum_{\langle w,\alpha\rangle=1} C_{00}(\ell(\alpha))\frac{s^\alpha}{\alpha!} \tag{2.5}$$

$$t_{\nu_1,\nu_2} = \sum_{\langle w,\alpha\rangle=1-(\rho_1\nu_1+\rho_2\nu_2)} C_{\nu_1\nu_2}(\ell(\alpha))\frac{s^\alpha}{\alpha!} \qquad \text{pour} \qquad (\nu_1,\nu_2)\neq(0,0) \tag{2.6}$$

où la fonction linéaire $\ell(\alpha)$ est définie comme suit:

$$\ell(\alpha) = \left(\sum_{i=0}^{\mu-1} i\,\alpha_{i0},\nu_2\right) \qquad \text{pour} \qquad A_\mu$$

$$\ell(\alpha) = \left(\sum_{(\nu_1,\nu_2)\neq(0,0)} \nu_1\alpha_{\nu_1\nu_2}, \sum_{(\nu_1,\nu_2)\neq(0,0)} \nu_2\alpha_{\nu_1,\nu_2}\right) \qquad \text{pour} \qquad D_\mu, E_\mu.$$

Le changement des coordonées $s\to t$ est un difféomorphisme. Desormais nous nous serverons de la notation $t=(t_0,t')$, où $t'=(t_{\nu_1\nu_2}), (\nu_1,\nu_2)\in\mathbf{I}\setminus\{0,0\}$.

Soit $H(x,y;s)$ un des polynômes de la liste (2.1). On prend un cycle évanescent $\gamma_s\subset\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : H(x,y;s)=0\}$. Alors on peut définir l’intégrale d’Abel y associée :

$$I_{x^{k_1}y^{k_2},\gamma_s}(s) = \int_{\gamma_s} x^{k_1}y^{k_2}\frac{dx\wedge dy}{dF},$$

et un vecteur

$$\mathbf{K}(s) = (I_{x^{k_1}y^{k_2}}(s))_{(k_1,k_2)\in\mathbf{I}}.$$

L’énoncé suivant met à jour l’avantage d’écrire le système de Gauss-Manin au moyen des coordonnées comme (2.5), (2.6) dans nos études.

Théorème 2.1. *Si on définit une base des intégrales d’Abel $\mathbf{J}(t)=(J_{\nu_1\nu_2}(t))_{(\nu_1,\nu_2)\in\mathbf{I}}$ comme suit:*

$$J_{\nu_1\nu_2}(t) = \int_{\gamma_{s(t)}} \frac{\partial}{\partial t_{\nu_1\nu_2}}F(x,y,s(t))\frac{dx\wedge dy}{dF},$$

alors les énoncés suivant ont lieu.

1. Il existe une matrice $P(t')\in GL(\mu,\mathbf{C}[t'])$ telle que:

$$\mathbf{K}(s(t)) = P(t')\cdot\mathbf{J}(t) \tag{2.7}$$

où $P(t')=\frac{\partial S_\nu}{\partial t_{\tilde\nu}}$ et les indices $\tilde\nu,\nu\in\mathbf{I}$.

2. Les intégrales satisfont un système d’équations différentielles:

$$\tilde S(t)\frac{\partial}{\partial t_0}\mathbf{J}(t) = \Lambda\cdot\mathbf{J}(t) \tag{2.8}$$

où $\Lambda = diag(w_{\nu_1\nu_2})_{(\nu_1,\nu_2)\in\mathbf{I}}$. La matrice $\tilde S(t)\in End(\mathbf{C}^\mu)\otimes\mathbf{C}[t]$ satisfait les conditions ci-dessous:

$$\frac{\partial}{\partial t_0}\tilde S(t) = id_\mu,$$

$$\det\tilde S(t(s)) = \Delta_\mu(s) \tag{2.9}$$

où $\Delta_\mu(s)$ est le discriminant de la déformation verselle.

On note $D := \{s \in \mathbf{C}^\mu : \Delta_\mu(s) = 0\}$. En reprenant les notations depuis le début, on formule l'énoncé central comme suit.

Théorème 2.2. *Soit $\gamma_s \subset \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : H(x,y;s) = 0\}$ un cycle évanescent de la déformation verselle de la liste (2.1). Alors il existe un ensemble ouvert dense $U \subset \mathbf{R}^\mu \setminus D$ tel que la multiplicité des zéros N de l'intégrale d'Abel (1.1) non-nulle*

$$I_{P,Q,\gamma_s}(s) := \int_{\gamma_s} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

doit satisfaire à chaque point $s \in U$ l'inégalité suivante:

$$N \leq \mu(1 + [\rho_1(K-1) + \rho_2(K-1)]) - 1.$$

Desormais on va s'intéresser à la dérivée de l'intégrale (1.1)

$$\frac{\partial}{\partial s_0} I_{P,Q,\gamma_s}(s) = \int_{\gamma_s} \frac{d(P(x,y)dx + Q(x,y)dy)}{dF} = \int_{\gamma_s} \frac{(-P_y(x,y) + Q_x(x,y))dx \wedge dy}{dF},$$

que l'on note par

$$I_{R,\gamma_s}(s) := \sum_{0 \leq k_1+k_2 \leq K-1} \int_{\gamma_s} R_{k_1k_2} x^{k_1} y^{k_2} \frac{dx \wedge dy}{dF}.$$

On montre que la multiplicité des zéros de l'intégrale $I_{R,\gamma_s}(s)$ ne dépasse pas $\mu(1 + [\rho_1(K-1) + \rho_2(K-1)]) - 2$.

Il est facile de voir qu'il existe des pôlynômes $P^{(k)}_{\nu_1,\nu_2}(\bullet)$ de degré au plus $v_0 := [\rho_1(K-1) + \rho_2(K-1)]$ pour un vecteur quelconque $(R_{k_1k_2}) \in \mathbf{R}^{\frac{(K+1)K}{2}}$ ([3], [8]):

$$\sum_{0 \leq k_1+k_2 \leq K-1} R_{k_1k_2} I_{x^{k_1}y^{k_2}}(s(t)) = \sum_{(\nu_1,\nu_2) \in \mathbf{I}} P^{(k)}_{\nu_1,\nu_2}(t_0 - \tilde{t}_0) \cdot J_{\nu_1\nu_2}(t)$$

avec $\tilde{t}_0 \in \mathbf{C}^\mu \setminus D$.

Notons le vecteur de taille $\mu(v_0+1)$:

$$\tilde{\mathbf{J}}(t) =^t (J_{00}(t), \ldots, J_{\mu_1\mu_2}(t), (t_0 - \tilde{t}_0)J_{00}(t), \ldots, (t_0 - \tilde{t}_0)J_{\mu_1\mu_2}(t), \ldots$$

$$\ldots, (t_0 - \tilde{t}_0)^{v_0} J_{00}(t), \ldots, (t_0 - \tilde{t}_0)^{v_0} J_{\mu_1\mu_2}(t)).$$

Ici $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbf{I}$ tel que $\mu_1 + \mu_2 = \max_{(\nu_1,\nu_2) \in \mathbf{I}} \nu_1 + \nu_2$. On note $M = \mu(v_0+1)$. Notre théorème 2.2 se déduit du lemme suivant.

Lemme 2.3. *Il existe des polynômes $\delta^{(i)}(t), i \in \mathbf{N}$ de degré $\frac{M(M+1)}{2}(\mu!)^2$ tels que pour $(\tilde{t}_0, t') \in \mathbf{R}^\mu \setminus D$, qui se trouve hors des zéros de $\delta^{(i)}(t)$, l'énoncé suivant soit valide.*

(i)Si un vecteur $\vec{r} \in \mathbf{R}^M \setminus \{0\}$ satisfait la relation suivante,

$$\langle \vec{r}, \frac{1}{\ell!} \left(\frac{d}{dt_0}\right)^\ell \tilde{\mathbf{J}}(\tilde{t}_0, t') \rangle = 0, \tag{2.10}$$

pour $0 \leq \ell \leq M-1$ alors (2.10) est valable pour $\ell \geq M = \mu(v_0+1)$ aussi.

(ii) L'ensemble $\{t \in \mathbf{R}^\mu; \delta^{(i)}(t) \neq 0, i \in \mathbf{N}\}$ est un ouvert dense de $\mathbf{R}^\mu \setminus D$.

Démonstration D'abord on établit la relation entre $\tilde{\mathbf{J}}(\tilde{t}_0, t')$ et $\left(\frac{\partial}{\partial t_0}\right)^\ell \tilde{\mathbf{J}}(\tilde{t}_0, t')$. Dans ce but, on introduit $\mathbf{J}(t) = ^t (J_{00}(t), \ldots, J_{\mu_1\mu_2}(t))$. Notons le poids quasihomogène d'une forme $x^{\nu_1}y^{\nu_2}dxdy/dF$ par $\lambda_{\nu_1\nu_2} = \rho_1(\nu_1 + 1) + \rho_2(\nu_2 + 1) - 1$. D'après (2.8) les coefficients de développement de Taylor de $\mathbf{J}(t)$ s'écrivent sous la forme suivante:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_0}\right)^\ell \mathbf{J}(\tilde{t}_0, t') = \tilde{S}^{-\ell}(\tilde{t}_0, t')(\Lambda - (\ell-1)id_\mu)\ldots(\Lambda - id)\Lambda\cdot\mathbf{J}(\tilde{t}_0, t') \tag{2.11}$$

où $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_{00}, \ldots, \lambda_{\mu_1\mu_2})$. A l'aide de la formule (2.11) on conclut facilement la relation suivante:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_0}\right)^\ell \tilde{\mathbf{J}}(\tilde{t}_0, t') = \Sigma^{(\ell)} \cdot \tilde{\mathbf{J}}(\tilde{t}_0, t'). \tag{2.12}$$

Ici $\Sigma^{(\ell)}$ est une matrice $M \times M$, dont la composante $\sigma_{ij}^{(\ell)}, \in End(\mathbf{C}^\mu) \otimes \mathbf{C}[t]$ $(i,j) \in [0, v_0]^2$ est déterminée comme suit:

$$\sigma_{ij}^{(\ell)} = \begin{cases} \tilde{S}^{-\ell}\Lambda(\Lambda - id_\mu)\ldots(\Lambda - (\ell-1)id_\mu) & 0 \le i = j \le v_0 \\ i\ell\tilde{S}^{-(\ell+j-i)}\Lambda(\Lambda - id_\mu)\ldots(\Lambda - (\ell+j-i)id_\mu) & 0 \le j < i \le v_0 \\ 0 & i < j \quad \text{où} \quad \ell + j - i < 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

C'est-à-dire:

$$\Sigma^{(\ell)} = \begin{pmatrix} \sigma_{00}^{(\ell)} & \sigma_{01}^{(\ell)} & \cdots & \sigma_{0v_0}^{(\ell)} \\ \sigma_{10}^{(\ell)} & \sigma_{11}^{(\ell)} & \cdots & \sigma_{1v_0}^{(\ell)} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sigma_{v_00}^{(\ell} & \sigma_{v_01}^{(\ell)} & \cdots & \sigma_{v_0v_0}^{(\ell)} \end{pmatrix}.$$

A l'aide de la matrice $\Sigma^{(\ell)}$, la condition (2.10) se transforme en l'équation suivante:

$$\langle \vec{r}, \Sigma^{(\ell)} \cdot \tilde{\mathbf{J}}(\tilde{t}_0, t')\rangle = 0 \tag{2.14}$$

pour $0 \le \ell \le \mu - 1$. Puisque $(\tilde{t}_0, t') \notin D$, les valeurs propres de la matrice $\tilde{S}(\tilde{t}_0, t')$ sont sans multiplicité. Par consequence, $\tilde{S}(\tilde{t}_0, t')$ est diagonalisable à l'aide d'une matrice T à coefficients de fonctions semi-algébriques. C'est-à-dire:

$$T^{-1}\tilde{S}(\tilde{t}_0, t')T = \mathrm{diag}(\tilde{t}_0 - \tau_1(t'), \tilde{t}_0 - \tau_2(t'), \ldots, \tilde{t}_0 - \tau_\mu(t')) \tag{2.15}$$

où $\tau_i(t') \neq \tau_j(t')$ pour $i \neq j$.

En tenant compte de (2.12), (2.13), (2.14) on peut voir que l'existence d'une collection de nombres,dépendant de $(\tilde{t}_0, t',\ \lambda_{00}, \cdots, \lambda_{\mu_1\mu_2})$, $d_M^{(i)}(\tilde{t}_0, t'), d_{M-1}^{(i)}(\tilde{t}_0, t'), \ldots, d_0^{(i)}(\tilde{t}_0, t'), i \ge 0$, satisfaisant (2.16) ci-dessous est une condition suffisante pour que (2.10) pour $\ell \ge \mu - 1$ entraîne (2.10) pour $\ell \ge \mu$ aussi:

(2.16)

$$d_M^{(i)}(\tilde{t}_0, t')\frac{\tilde{S}^{-(M-1)}}{(M+i)!}(\Lambda - (M+i-1)id_\mu)\ldots(\Lambda - i\cdot id_\mu) + \frac{d_{M-1}^{(i)}(\tilde{t}_0, t')}{(M+i-1)!}\tilde{S}^{-M-i+1}(\Lambda - (\mu+i-2)id_\mu)\ldots$$

$$\ldots(\Lambda - i\cdot id_\mu) + \ldots + d_0^{(i)}(\tilde{t}_0, t')\cdot\frac{\tilde{S}^{-i}}{i!} = 0,$$

avec $d_M^{(i)}(\tilde{t}_0, t') \neq 0$. Vu (2.15), la relation (2.16) est équivalente à l'équation suivante:

$$\sum_{\ell=1}^{M} d_\ell^{(0)}\frac{(\tilde{t}_0 - \tau_\nu(t'))^{-\ell}}{\ell!}\cdot\prod_{b=0}^{\ell-1}(\lambda_\nu - b) + d_0^{(0)} = 0, \qquad \nu \in \mathbf{I},$$

$$\sum_{\ell=0}^{M} \frac{d_\ell^{(i)}(\tilde{t}_0 - \tau_\nu(t'))^{-\ell}}{(\ell+i)!} \prod_{b=i}^{\ell+i-1} (\lambda_\nu - b) = 0$$

Celui-là est, à son tour, équivalente à l'équation ci-dessous:

$$\tilde{\Sigma}^{(i)} \cdot \vec{\mathbf{d}}^{(i)} = 0, \quad i \in \mathbf{N}$$

où

$$\tilde{\Sigma}^{(i)} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc}
\frac{1}{(M+i)!}\prod_{b=i}^{M+i-1}(\lambda_{00}-b), & \frac{(\tilde{t}_0-\tau_1)}{(M+i-1)!}\prod_{b=i}^{M+i-2}(\lambda_{00}-b), & \cdots, \\
\frac{1}{(M+i)!}\prod_{b=i}^{M+i-1}(\lambda_{01}-b), & \frac{(\tilde{t}_0-\tau_2)}{(M+i-1)!}\prod_{b=i}^{M+i-2}(\lambda_{01}-b), & \cdots, \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{1}{(M+1)!}\prod_{b=i}^{M+i-1}(\lambda_{\mu_1\mu_2}-b) & \frac{(\tilde{t}_0-\tau_\mu)}{(M+i-1)!}\prod_{b=i}^{M+i-2}(\lambda_{\mu_1\mu_2}-b) & \cdots, \\
\frac{1}{(M+i-1)!}\prod_{b=i}^{M+i-2}(\lambda_{00}-b) & \frac{(\tilde{t}_0-\tau_1)}{(M+i-2)!}\prod_{b=i}^{M+i-3}(\lambda_{00}-b), & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{1}{(M+i-1)!}\prod_{b=i}^{M+i-2}(\lambda_{\mu_1\mu_2}-b) & \frac{(\tilde{t}_0-\tau_\mu)}{(M+i-2)!}\prod_{b=i}^{M+i-3}(\lambda_{\mu_1\mu_2}-b), & \cdots, \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{1}{(M+i-v_0)!}\prod_{b=i}^{M+i-v_0-1}(\lambda_{00}-b) & \frac{(\tilde{t}_0-\tau_1)}{(M+i-v_0-1)!}\prod_{b=i}^{M+i-v_0-2}(\lambda_{00}-b), & \cdots, \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{1}{(M+i-v_0)!}\prod_{b=i}^{M+i-v_0-1}(\lambda_{\mu_1\mu_2}-b) & \frac{(\tilde{t}_0-\tau_\mu)}{(M+i-v_0-1)!}\prod_{b=i}^{M+i-v_0-2}(\lambda_{\mu_1\mu_2}-b), & \cdots,
\end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{cccccc}
\cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots & (\lambda_{00}-i)\frac{(\tilde{t}_0-\tau_1)^{M-1}}{(i+1)!}, & \frac{(\tilde{t}_0-\tau_1)^M}{i!} \\
\cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots & (\lambda_{01}-i)\frac{(\tilde{t}_0-\tau_2)^{M-1}}{(i+1)!}, & \frac{(\tilde{t}_0-\tau_2)^M}{i!} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots & (\lambda_{\mu_1,\mu_2}-i)\frac{(\tilde{t}_0-\tau_\mu)^{M-1}}{(i+1)!}, & \frac{(\tilde{t}_0-\tau_\mu)^M}{i!} \\
\cdots & \cdots, & \cdots, & \cdots, & \frac{(\tilde{t}_0-\tau_1)^{M-1}}{i!}, & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots, & \frac{(\tilde{t}_0-\tau_\mu)^{M-1}}{i!}, & 0 \\
\vdots & \vdots & & & & \vdots \\
\cdots, & \frac{(\tilde{t}_0-\tau_1)^{M-v_0}}{i!}, & 0, & \cdots, & 0, & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\cdots, & \frac{(\tilde{t}_0-\tau_\mu)^{M-v_0}}{i!}, & 0, & \cdots, & 0, & 0
\end{array} \right).$$

$$\vec{\mathbf{d}}^{(i)} = (d_M^{(i)}, d_{M-1}^{(i)}, \cdots, d_0^{(i)}) \in \mathbf{R}^{M+1}, M = \mu(v_0+1).$$

Le vecteur $\vec{\mathbf{d}}^{(i)}$ est un normal aux M vecteurs colonnes de la matrice $\tilde{\Sigma}^{(i)}$. Si on note ces M vecteurs colonnes par $\vec{v}_1^{(i)}, \cdots, \vec{v}_M^{(i)}$, d'après algèbre linéaire on obtient l'expression suivante:

$$\vec{\mathbf{d}}^{(i)} = \text{const.} \vec{v}_2^{(i)} \wedge \cdots \wedge \vec{v}_M^{(i)}.$$

On en déduit que

$$d_M^{(i)}(\tilde{t}_0(t'), \tau_1(t'), \cdots, \tau_\mu(t'), \lambda_{00}, \cdots, \lambda_{\mu_1\mu_2}) = \tilde{\Sigma}^{(i)} \begin{pmatrix} 2, 3, \cdots, M+1 \\ 1, 2, \cdots, M \end{pmatrix}$$

i.e. un mineur $M \times M$ de la matrice $\tilde{\Sigma}^{(i)}$. Si on définit

$$\delta_M^{(i)}(t) = \prod_{\rho \in \mathfrak{S}_\mu, \sigma \in \mathfrak{S}_{\mathbf{I}}} d_M^{(i)}(t_0, \tau_{\rho(1)}(t'), \cdots, \tau_{\rho(\mu)}(t'), \lambda_{\sigma(00)}, \cdots, \lambda_{\sigma(\mu_1\mu_2)}),$$

alors $\delta_M^{(i)}(t)$ est un polynôme de degré $\frac{M(M+1)}{2}(\mu!)^2$. Ici $\mathfrak{S}_{\mathbf{I}}$ indique le groupe de permutation de μ indices de $\mathbf{I}$.

On note par

$$B(t') = \prod_{1\leq i<j\leq\mu} (\tau_i(t') - \tau_j(t'))^2 \tag{2.17}$$

le polynôme définissant l'ensemble de bifurcation. Alors il existent un entier $L \geq 0$ (eventuellement on calcule $L = \frac{(M\cdot(\mu-1)!^2)}{2}$) et des polynômes $Q_j^{(i)}(\lambda_{00}, \cdots, \lambda_{\mu_1\mu_2})$, $j = 0, \cdots, \frac{M(M+1)}{2\mu}(\mu!)^2 - L$ invariants sous l'action de $\mathfrak{S}_{\mathbf{I}}$ tels que,

$$\delta_M^{(i)}(t) = (\sum_{\frac{(\mu-1)\ell}{2}+j=\frac{M(M+1)}{2\mu}(\mu!)^2-L} Q_j^{(i)}(\lambda)(\Delta_\mu(t))^j (B(t'))^\ell)\Delta_\mu(t)^L,$$

où $Q_0^{(i)}(\lambda) \neq 0$ $Q^{(i)}_{\frac{M(M+1)}{2\mu}(\mu!)^2-L}(\lambda) \neq 0$.

Evidemment $\delta_M^{(i)}(\tilde{t}_0, t') = 0$ pour les zéros $(\tilde{t}_0, t')$ de $d_M^{(i)}(\tilde{t}_0, \tau_1, \cdots, \tau_\mu, \lambda_{00}, \cdots, \lambda_{\mu_1\mu_2})$ on a donc démontré l'énoncé du lemme pour $t = (t_0, t')$ qui satisfait

$$\Delta_\mu(s(t)) \neq 0, \quad \delta_M^{(i)}(t) \neq 0, \quad i = 0, 1, 2, \cdots .$$

Au voisinage de t tel que $B(t')$ assez grand par rapport à $\Delta_\mu(s(t))$, il est un ouvert dense. Il est aussi un ouvert dense au voisinage de t tel que t_0 assez grand par rapport à $B(t')$. En tenant compte de la quasihomogénéité, c'est un emsemble ouvert dense de $\mathbf{R}^\mu$. Cela démontre le lemme. C.Q.F.D.

Remarque 1. Pour $\mathbf{J}(t)$ de (2.11), B.Dubrovin [2] a obtenu l'équation suivante:

$$[\Delta_\mu(s(t))(\frac{\partial}{\partial t_0})^\mu + g_{\mu-1}(t)(\Lambda - id_\mu)(\frac{\partial}{\partial t_0})^{\mu-1} + g_{\mu-1}(t)(\Lambda - id_\mu)(\Lambda - 2id_\mu)\frac{\partial}{\partial t_0}^{\mu-2} + \cdots$$

$$\cdots + g_1(t)(\Lambda - id_\mu)\cdots(\Lambda - (\mu-1)id_\mu)\frac{\partial}{\partial t_0} + (\Lambda - id_\mu)\cdots(\Lambda - \mu\cdot id_\mu)]\mathbf{J}(t) = 0,$$

pour la matrice diagonale Λ de (2.8) et des polynômes $g_i(t)$ de degré i en t_0 t.q.

$$det(\tilde{S}(t) + \lambda) = \Delta_\mu(s(t)) + \sum_{i=0}^{\mu-1} \lambda^{\mu-i} g_i(t).$$

C'est une conséquence de l'équation (2.11) après application du théorème de Cayley-Hamilton à la matrice $\tilde{S}(t)$. Cela implique que la multiplicité des zéros d'une intégrale

$$\sum_{(\nu_1,\nu_2)\in\mathbf{I}} P_{\nu_1,\nu_2} J_{\nu_1\nu_2}(t)$$

avec $P_{\nu_1,\nu_2} \in \mathbf{R}$ ne doit pas dépasser μ hors de l'ensemble critique $D = \{t; \Delta_\mu(s(t)) = 0\}$.

En fait, on peut déduire de la démonstration du Thórème 2.2 iii) une estimation analogue pour $I_{x^k y^m dx}(s)$.

References

[1] E. Brieskorn, *Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen,* Manuscripta Math., **2** (1970), pp. 103-161.

[2] B.Dubrovin, *Period mappings on a Frobenius manifold and their applications* , preprint (1999).

[3] L.Gavrilov , *Petrov modules and the Zeros of Abelian integrals* , preprint, Toulouse (1997).

[4] P.Mardešić, *An explicit bound for the multiplicity of zeros of generic Abelian integrals,* Nonlinearity, **4** (1991), pp.845- 852.

[5] M.Noumi, *Expansion of the solutions of a Gauss-Manin system at a point of infinity,* Tokyo J. Math. **7** (1984), pp. 1-60.

[6] K.Saito, J.Sekiguchi, T.Yano, *On a certain generator system of the ring of invariants of a finite reflexion group,* Comm. Algebra, **8**, (1980), pp. 373-408.

[7] S.Tanabé, *Connexion de Gauß- Manin associée à la déformation verselle de la singularité A_μ et zéros de l'int'egrale hyperelliptique,* preprint, Max Planck Institut für Mathematik, (1999).

[8] S.Yakovenko, *Complete Abelian integrals as rational envelopes,* Nonlinearity, **7** (1994), pp.1237- 1250.

Moscow Independent University
Bol'shoj Vlasijevskij Pereulok 11,
MOSCOW, 121002,
Russia
E-mails: tanabe@mccme.ru,
tanabesusumu@hotmail.com